Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année Universitaire 2008-2009

Travaux dirigés de Mécanique du Solide
SMI-SM-S3
Série-1

Exercice 1

On appelle division vectorielle, l'opération qui fait correspondre à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur $\vec{x}$ tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$$

- Montrer que cette opération n'est possible que si $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Montrer que $\vec{x}$ doit être dans un plan $\Pi \perp \vec{v}$ et qu'il peut être mis sous la forme :

$$\vec{x} = \vec{w} + \lambda \vec{u}$$

où $\lambda \in \Re$ et $\vec{w}$ un vecteur de $\Pi \perp$ au plan $(\vec{u}, \vec{v})$.

3- En posant alors $\vec{w} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$; avec $\alpha \in \Re$; montrer que $\alpha = -\frac{1}{//\vec{u}//^2}$

Exercice 2

- Déterminer le lieu du support d'un vecteur glissant $\vec{V}$ d'origine O dont les moments par rapport à deux axes concourants donnés sont dans un rapport donné.
- Montrer que le moment d'un système de glisseurs $\vec{V_i}$ concourants en un point C est égale à celui de la résultante $\vec{R}$ de ces vecteurs par rapport au même point C.
- Montrer que le moment d'un système de glisseurs $\vec{V_i}$ parallèles est égale à celui de la résultante $\vec{R}$ de ces vecteurs par rapport à leur centre de gravite G (barycentre).

Exercice 3

I- On se donne deux glisseurs $(A, \vec{U})$ et $(B, \vec{V})$ tels que $A(1,1,\alpha)$, $B(0,2,0)$, $\vec{U}(0,0,\alpha)$ $\vec{V}(\beta,3,0)$ où α et β sont des réels.

Soit le torseur $\tau = (A,\vec{U}) + (B,\vec{V})$

1. Donner les éléments de réduction de τ au point $O(0,0,0)$
2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que τ soit un glisseur. Déterminer alors son support.
3. Déterminer l'axe centrale de τ

II- A tout point $P(x,y,z)$ de l'espace, on associe la famille de champs de vecteurs $\vec{V}t(P)$ défini par :

$$\vec{V}_t(P) = (3y - tz + 1,\ -3x + 2tz,\ tx - t^2 y - \tfrac{4}{3}) \text{ avec } t \in \Re$$

1- Montrer que les seuls champs équiprojectifs sont obtenus pour $t = 0$ et $t = 2$.

2- Déterminer les torseurs associés aux champs $\vec{V}_0(P)$ et $\vec{V}_2(P)$ par leurs éléments de réduction au point $O(0,0,0)$.

Exercice 4

Soit la famille définie dans $R(O,\vec{e}x,\vec{e}y,\vec{e}z)$ par les trois vecteurs :

$\vec{a}(1,0,-3)$ dont le siège est *A(1,0,0)*

$\vec{b}(-1,1,0)$ dont le siège est *B(0,1,0)*

$\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ dont le siège est *C(X,Y,6)*

1- Déterminer les composantes de $\vec{c}$ pour que le torseur que réalise la famille soit représentable par un couple.

2- Déterminer $\vec{c}$, X et Y pour que le torseur que réalise la famille en O soit le torseur nul

On impose à l'axe centrale Δ du torseur que réalise la famille en O d'être parallèle à Oy.

3- Déterminer alors c_x, c_z et les coordonnées du point Q d'intersection de Δ avec le plan (xOz) en fonction de c_y, X et Y.

4- Déterminer c_x, c_y, et Y pour que simultanément :

a- La résultante de la famille soit parallèle à Ox ;

b- $\vec{M}(c) = 0$;

c- $\vec{M}(O) = 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$

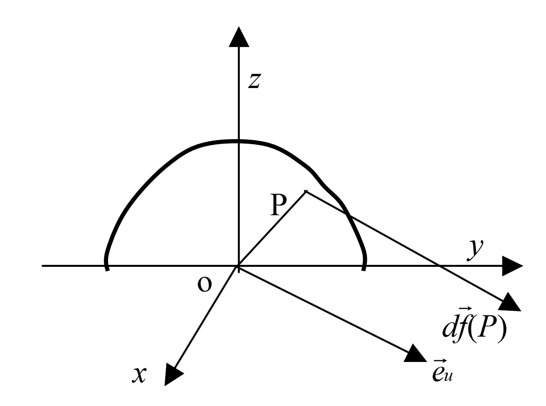
Exercice 5

Une plaque rigide S constituée d'un demi-disque de rayon a, de centre O, se trouve située dans le demi-plan (yOz) des $z > 0$ d'un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Elle baigne dans un champ de vecteurs continu défini en un point $P(r,\varphi)$ de la plaque par le vecteur $\vec{df}(P)$ associé à l'élément de surface $dS(P)$ entourant le point P tel que :

$$\vec{df}(P) = k\, r\, \vec{e_u}\, dS(P)$$

Où r et φ sont les coordonnées polaires du point P :

$OP = r$; $\varphi = (\vec{j}, \vec{OP})$



$\vec{e_u}$ est un vecteur unitaire fixe par rapport à R tel que $(\vec{i}, \vec{e_u}) = \theta$ et contenu dans le plan (xOy).

k est une constante strictement positive. On désigne par $\vec{e_v}$ le vecteur unitaire directement normal à $\vec{e_u}$ dans le plan (xOy) et par R' le repère $R'(O, \vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{k})$.

1. Donner l'expression de la résultante du torseur associé à la répartition vectorielle, projetée dans R'.
2. Calculer dans R', l'expression du vecteur moment en O, de τ.
3. Calculer l'invariant scalaire. Que peut-on en conclure à propos du moment en un point quelconque K de l'axe centrale Δ ?
4. Donner l'équation vectorielle de l'axe central du torseur sous la forme :

$$\vec{OK} = \vec{OQ} + \lambda \vec{R} \qquad \lambda \in \Re$$

Q étant le point d'intersection de l'axe central avec le plan (yOz)

   a. par la méthode générale de la division vectorielle.
   b. en utilisant le résultat de la 3éme question